83. 前談話73ノ訂正増補, 集合体ノ Geschlecht ニ就テ

小松醇郎(阪大)

本紙上數學談話會第24号18頁ノ H. Kneser ノ定理ノ証明ニハ誤ガアリマシタ、ソノ缺点ヲアノ方法デハ訂正出來ナイ様ニ思ヘマス。ソレ故 H. Kneser ノ定理ハ結局 H. Kneser ノ証明ハ非常ニ難解ノモノデハアリマスガ、ソレヲ認メルヨリ外致シ方アリマセン。

誤ト言フノハ Vollbrezel ノ境界トシテノ曲面ヲ二分スル einfach geschlossen ノ曲線ハ Vollbrezel ニテ homotop 0 ダト推論シタコトデアリマス。誠ニ恐縮ノ次第デス。

ソノ曲線ガ Elementarflächenstücke (Zelle) ノ境界ニナルタメニハ Vollbrezel ノ fundamentalgruppe ニテ einheit ニナルモノデアル事ガ必要且ツ十分ノ條件トナリマス。是レハ先ヅ先ヅ當然想像サレル事デアッタデセウ。

然シナガラ、アノ証明ニ用ヒタ方法ハ必ズシモ無意義ナモノデハナク三次元集合体ノ Geschlecht ノ決定ニ際シテ重要ナ結果ヲ與ヘルト思ヒマス。私ガ本紙上数學談話會第8号デ Geschlecht ノ問題ハ二ツニ分タレ、一ツハ純粋ニGruppe ノ問題、モ一ツハ幾何學的性質ニ関スル問題デアッテ Poincaré ノ Vermutung ノ解決ヲ要スルト述ベテ置キマシタ。所ガ

Poincaré ノ Vermutung ハ最近解決サレタ如クニ見エマス。 T.H.C. Whitehead: Certain theorems about Three-dimensional Manifolds (Quarterly Journal of Mathematics, Vol.5. No.20) ニテ

> 三次元閉集合体ニテ Fundamentalgruppe ガ Einheitsgruppe ナルモノハ 3-Sphäre ニ限ル.

ヲ載セテ居リマス。此ノ証明亦非常ニ面倒デアリマスガ一寸誤モ見出セナイ様デアリマス。此ノ定理ヲ使フト Geschlecht ノ問題ハ次ノ如ク決定サレ純粋ニ Gruppe ノ問題トナリマス。

三次元閉集合体ノ Geschlecht ハソノ Fundamentalgruppe ノ種々ナル Erzeugende ノ取リ方ニ對シ Erzeugende ノ minimale Anzahl ニ一致スル。

従ッテ、例ヘバ Linsenraum (p, q) ハ oder p ノ endliche zyklische Gruppe デアルカラ凡テ Geschlecht 1 デアリマス。

証明

Mannigfaltigkeit M^3, Geschlecht p ヲ與ヘル一ツノ Heegaard Diagramm ヲ Σ_1^3, Σ_2^3 ノ Vollbrezel 等記号ハ凡テ談話 73 ニ従フ。

Erzeugende ノ数ハ高々 $s_1, s_2, \cdots\cdots s_p$ ノ p 個、故ニ今ノ場合 Definierende Relationen ガ如何ニナッテモ fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ ノ Erzeugende ノ数ガ p ヨリ少クハナラナイト言ヘベヨイ。

i) 今一ツノ Automorphism A ニテ Erzeugende $q_1, \cdots\cdots$
$\cdots\cdots q_{p-1}$ トナッタトスル、即チ

$$A(q_i) = \Pi_i(s). \quad (i = 1, \cdots\cdots, p-1)$$

且 $R(q) = E, \quad q_p = E$

即チ A ハ Freie Gruppe $s_1, s_2, \cdots\cdots, s_p$ ノ Untere-gruppe $\mathfrak{F}$ ガ Freie Gruppe $q_1, \cdots\cdots, q_p$ ノ Untergruppe デ $\mathfrak{Y}$ ト isomorph ナ Gruppe ヘノ Abbildung デアル。

次ニ $s_1, \cdots\cdots, s_p$ ノ Freie Gruppe ト $\mathfrak{Y}$ トノ Faktor-gruppe 及ビ同様ニ q ノ方デノ Faktorgruppe ヲ考ヘル、スルト之ハ isomorph デアルカラ Abbildung B ガ存在スル。即チ

$$B(q) = \Pi(s)$$

A 及ビ B ノ二ツノ isomorphe Abbildung ニヨリ Freie Gruppe q ノ Freie Gruppe s ヘノ Abbildung (auf) ガ決定サレル。

(ii) Geschlecht p ノ一ツノ曲面デ Erzeugende 夫々 q_i, p_i トスルト此ノ曲面ノ標準曲面 F_2 ヘノ topologische Abbildung デ q_i ガ前ノ A, B カラ作ラレル Automorphism

ニテ對應スル $\Pi(s)$ ノ曲線ニ寫像サレルモノガアル、此ノ寫像ニテ p_j ガ Abbilden サレタ曲線（F_2 上ニテ）ハ

$$\text{Schnittpunkt } (q_i, p_j) = \delta_{ij}$$

ヨリ $\Pi_i(s)$ ト矢張リ又 F_2 上デ δ_{ij} ノ Schnittpunkt ヲ持ツ。

且ツ p_j ノ寫像ハ t_i ナル Erzeugende カラ作ラレル、ソコデ F_2 上、q_1, p_1 ガ寫ツタ曲線 $B(q_1)$, $AB(p_1)$ ヲ考ヘルナラバ、ソレハ M^3 ノ fundamentalgruppe ニテハ共ニ einheitselement ニ對應シ $B(q_1)$ ハ Σ_1^3 ノ方デ homotop O. $AB(p_1)$ ノ移ツタ曲線ハ Σ_2^3 ノ方デ homotop O.

$$\text{且ツ Schnitt punkt } (p_1, q_1) = 1$$

ソコデ　　$B(q_1)\ AB(p_1)\ B(q_1)^{-1}\ AB(p_1)^{-1}$

ナル曲線ハ F_2 上デ一ツノ Henkel ヲ他ト區別シ且ツ Σ_2^3 デ Elementarflächenstücke ノ Rand ヲ作ル。

(iii) 次ニ $B(q_1)\ AB(p_1)\ B(q_1)^{-1}\ AB(p_1)^{-1}$ ガ F_1 曲面ニ Abbilden サレタトキ矢張リ又一ツノ Henkel ヲ他ト beranden スル、且ツ今度ハ $B(q_1) = \Pi(s)$ ガ Σ_1^3 デ homotop O ト言フコトヨリ又 Σ_1^3 デ一ツノ Elementarflächenstücke ノ Rand ヲ作ル。

(iv) 上ノ ii), iii) ノ Elementarflächenstücke ハ夫々 Σ_1^3, Σ_2^3 ヲ二分スルコトハ 73 ノ談話ノ方法ガ應用サレル、

ソレ故両者ヲ曲線

$$B(q_1)\ AB(p_1)\ B(q_1)^{-1}\ AB(p_1)^{-1}$$

デ結ビ付ケルト一ツノ球面ヲナシ且ツ M^3 ヲ二分スル、而シテソノ一方ノ *fundamentalgruppe* ヲ考ヘルト *Erzeugende* $B(q_1)$, $AB(p_1)$ 共ニ *homotop* 0 デアルカラ *Einheitsgruppe*.

従ッテ始メニ述ベタ定理、*Poincaré* ノ *Vermutung* ヲ使ヘバ球面ニヨッテ囲マレタユークリッド空間ノ内部ニ *homöomorph* ナルコト容易ニ分ル。

故ニ M^3 ノ *Heegaard Diagramm* ノ種数ガ一ツダケ減ラサレル、即チ此処ノ *Henkel* 一ツノ代リニソノ境界 $B(q_1)AB(p_1)B(q_1)^{-1}AB(p_1)^{-1}$ ニツヅク一ツノ *Elementarflächenstücke* ヲ代用出来ル。

是ハ M^3 ノ *Geschlecht* p 即チ *Heegaard Diagramm* ノ種数ノ最小数 p ナルコトニ反スル。

故ニ *Gruppe* $\mathfrak{F}$ ノ *Erzeugende* ヲ如何ニ変ヘテモ p 個ヨリ少クハナリ得ナイ。

（以上）

例ヘバ *Linsenraum* (p,q) ハ *fundamental Gruppe* s_1, $s_1^p=1$. 故ニ *Geschlecht* 1. 此ノ *Heegaard Diagramm* ニテ p,q ハ如何ニ表ハレルカヲ調ベテ見マス。

$$r = ps + q't \qquad\qquad pm - qq' = \pm 1$$
$$u = qs + mt$$

ナル結果トナル、十記号ハ abelian ナル故デアリ、q'ハ

$0 \leqq q' \leqq \frac{p}{2}$ ニテ $qq' \equiv \pm 1 \pmod{p}$ ナル数デス。

何トナレバ

Linsenraum ニテ Vollringe ノ表面ノ関係ハ Seifert. S. 216. ノ如クトルトキハ

$$\begin{cases} r = ps + q't \\ qr + pu = t \end{cases}$$

$$\therefore \quad pu = t - qq't - pqs$$

サテ此ノ對應式デ q, q' ノ数ダケヲ交換シテモ homöomorph ナ Mannigfaltigkeit デス.（Seifert. S. 216）次ニ又

$$\begin{cases} r = ps + q'''t \\ u = q''s + vt \end{cases}$$

ナル對應式デ $\quad q''' \equiv q' \pmod{p}$

ニテモ homöomorph ノタメノ充分條件ナルコト容易ニ言ヘマス、從ッテ

系. fundamentalgruppe トシテ eudliche order p ノ Zyklische Gruppe ヲ持ツ閉集合体ハ homöomorph デナイモノガアルトシテモ高々 $\frac{p}{2}$ デアリマス。

(5,1) (5,2) ガ homöomorph デナイコトハ Alexander ノ結果デスガ (7,1) (7,2) ハ未解決ノ問題デス。